第六章
直線與道路偵測

內容

數位直線

- 虛線代表的直線乃是由虛線兩側的數位邊點所構成。
- 灰色帶狀區的邊點集會影響直線偵測的結果。

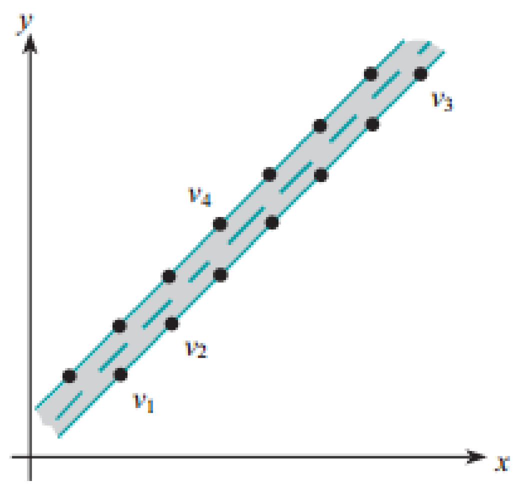


圖6.2.1 數位直線

6.2 蠻力法

令邊點集為V且$m=|V|$。每2個邊點可構成一直線，共有

$$\binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{2}=O(m^2)$$ 條可能的直線。

令這些構成的直線為 L_1、L_2、...和 L_k，此處 $k=\frac{m(m-1)}{2}$。

例如 $m=|V|=4$，有下列6種可能被偵測到的直線。

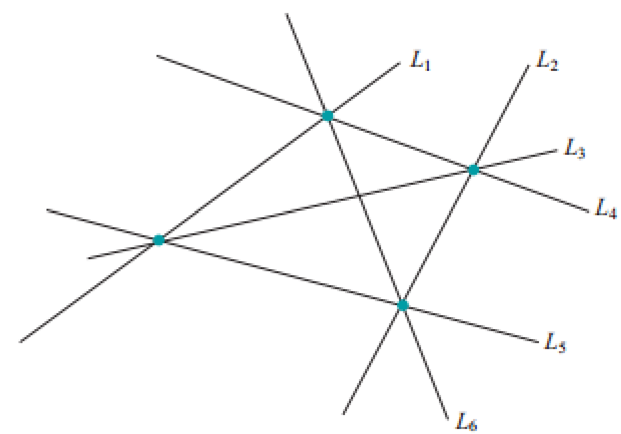


圖6.2.3 m=4時的所有可能線

每一邊點$T_1 = 1$計算其與(x', y')的距離:

$$L_i: y = a_i x + b_i \qquad (6.2.1)$$

若d小於設定的門檻值T_1，例如(x', y')，則邊點(x', y')對L_i投一票 。此處$T_1 = 1$代表該數位直線L_i允許頻寬為1。

若總得票數超過門檻值T_1，則我們稱L_i為一真正的直線(True Line)。

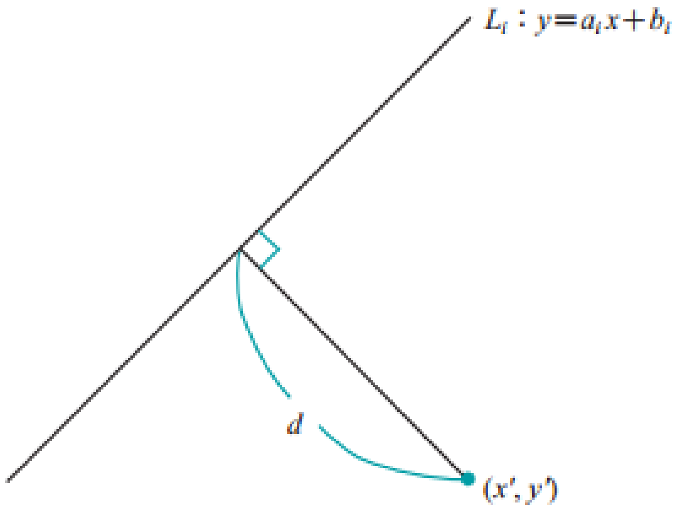


圖6.2.4 距離d的決定

定理6.2.1　令邊點集V 的邊點數為$m=|V|$，上述蠻力法可在$O(m^3)$的時間完成直線偵測的工作。

證明：

計算一條直線得到的投票分數，需檢測m個邊點，故需花費時間為$O(m)$。考慮 $O(m^2)$條直線，總時間複雜度為$O(m\times m^2)=O(m^3)$。

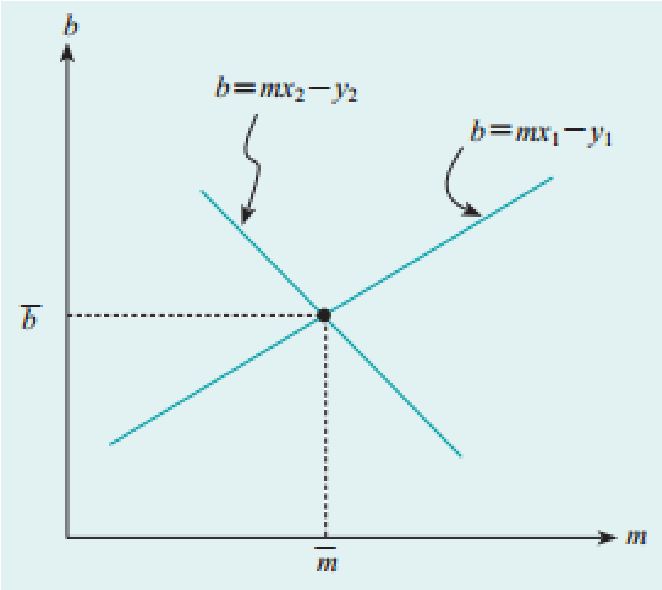
範例 1：今有二維空間上通過直線$L: y=\bar{m}x+\bar{b}$ 的兩點 (x_1,y_1)和(x_2,y_2)，試問這兩點在(m,b)參數空間的分佈情形為何？這裏m代表斜率，而b代表截距。

解答：

假設(x_1,y_1)和(x_2,y_2)兩點滿足下式

$$y_i=\bar{m}x_i+\bar{b},\ i=1,2$$

則這兩點必定相交於(m,b)參數空間上的一點。



解答完畢

6.3 霍式轉換法

- 將$x-y$空間轉換成$\gamma-\theta$參數空間(Parameter Space)，即所謂的法距 - 法角空間(Normal Distance - Normal Angle Space)。

$\overline{CE}=y_2$，$\overline{OE}=x_2$

由直角三角形ΔCDE

➔ $d=y_2\sin\theta=\overline{AB}$

由直角三角形ΔOBE

➔ $\overline{OB}=\overline{OE}\cos\theta=x_2\cos\theta$

$$r=\overline{OB}+\overline{BA}=x_2\cos\theta+y_2\sin\theta \qquad (6.3.1)$$

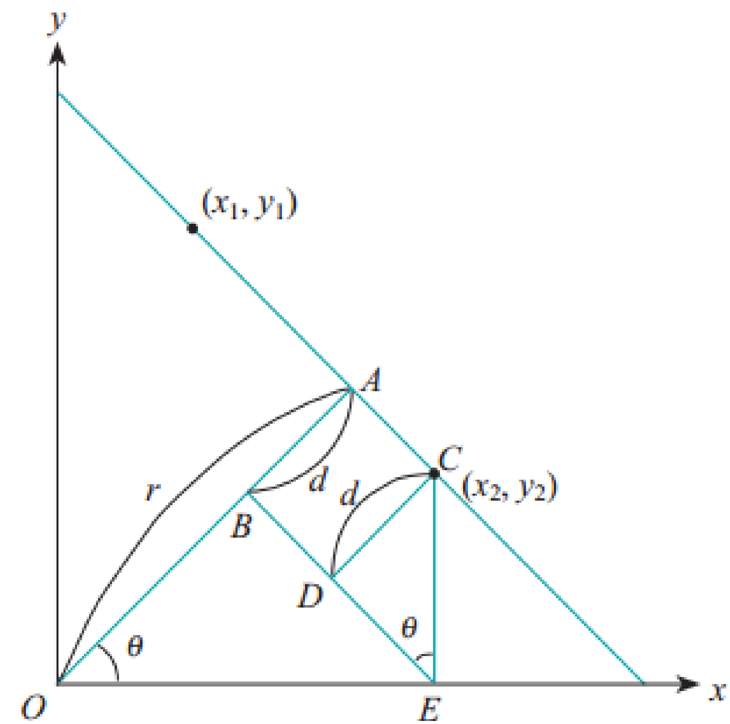


圖6.3.1 $x-y$空間和$\gamma-\theta$空間的關係

令 $\theta = 45^\circ$

座標(2,1)，代入式子(6.3.1)後，得到$r = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

座標(1,2)，透過式子可得到 $r = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

座標(0,3)，透過式子可得到 $r = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

座標(3,3)，透過式子可得到 $r = 3\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

➔ (2,1)、(1,2)和(0,3)為共線

假設門檻值定為 $T_2 = 2$，可得知在圖6.3.2中有一條角度為 $\frac{3}{4}\pi(=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})$ 的直線通過該影像。

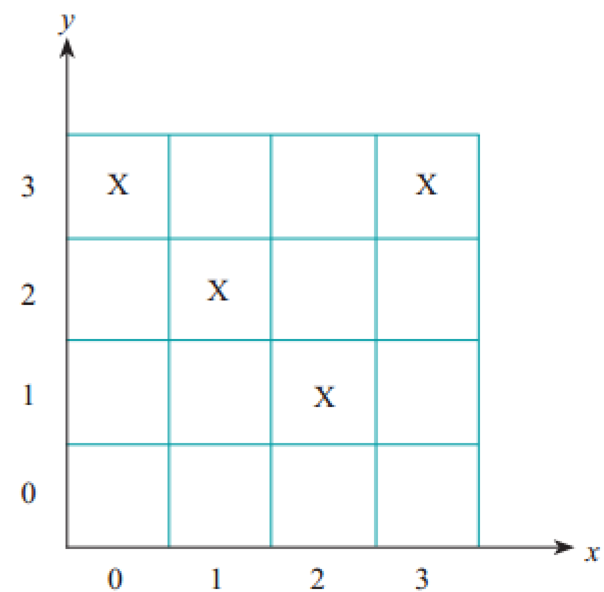


圖6.3.2 4×4 的影像小例子

- 將角度範圍$[0,2\pi]$量化成n份。
- 使用二維陣列累積陣列(Accumulation Array)來當霍式轉換法的資料結構：

$AA[\,] \leftarrow 0$ { 將二維累積陣列歸零 }

對邊點集V的每一邊點(x, y)

$For\ i = 0\ to\ n$

$\quad r = x\cos\theta_i + y\sin\theta_i$

$\quad AA[r,\theta_i] \leftarrow AA[r,\theta_i] + 1$

end

若在某一個投票箱(cell)中，其累計的邊點數超過門檻值T_2，則存在該投票箱的那些邊點可說形成了一條可接受的直線。

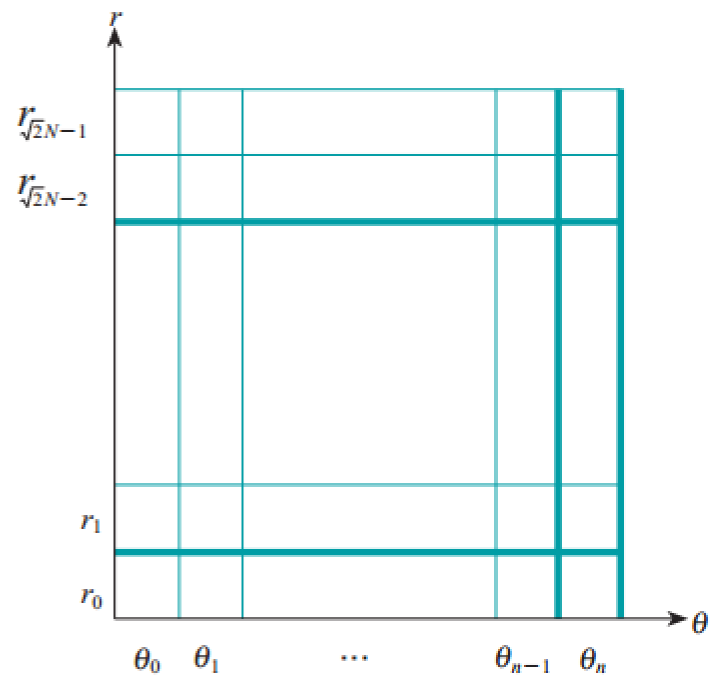


圖6.3.3 累積陣列

定理6.3.1　霍式轉換法可在 $O(mn)$ 的時間內完成直線偵測的工作，此處 $m=|V|$且 n 為 $[0,\pi]$ 的角度量化數。

證明：

針對任一個邊點，考慮n個量化角度，則可得出n個法距值。今考慮所有m個邊點，則共需$O(mn)$時間。

圖6.1.1 道路影像

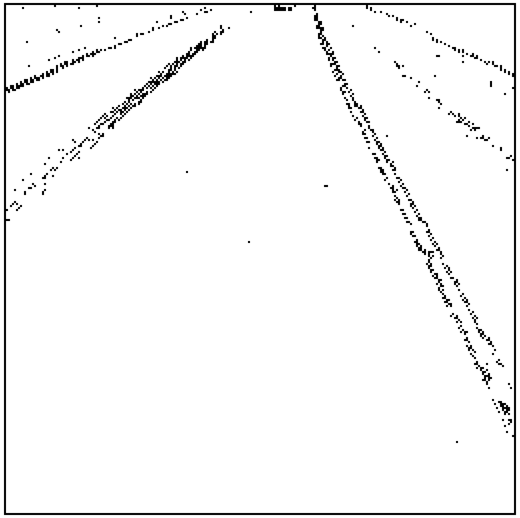


圖6.2.2 圖6.1.1的邊點集

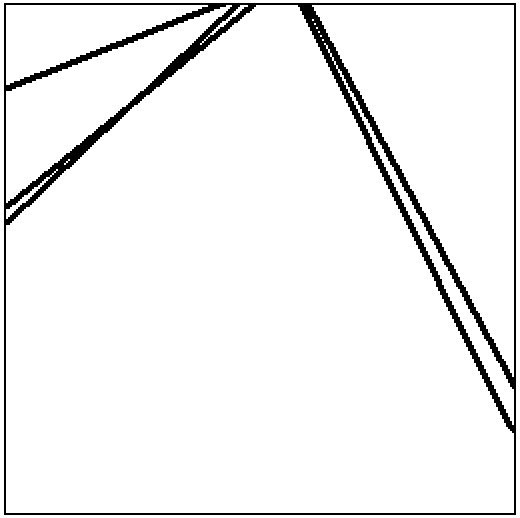


圖6.3.4 測得之直線

範例1：給下列八個點(2,4), (2,8), (4,3), (4,6), (5,5), (7,3), (10,0), (10,5)，請利用霍式轉換法並配合圖6.3.3所給的二維累積陣列(假設門檻為4)。
(1)求出滿足條件直線的法距(γ)及法角(θ)。
(2)並把連成直線的點列出來 。

解答：為方便計，嘗試45°角度，利用下列迴圈

$$
\begin{aligned}
&For\ i = 0\ to\ n \\
&\qquad r = x\cos\theta_i + y\sin\theta_i \\
&\qquad AA[r,\theta_i] \leftarrow AA[r,\theta_i] + 1 \\
&end
\end{aligned}
$$

可得到在$\theta = 45°$且$\gamma = 5\sqrt{2}$處的投票箱內，
得票數等於5。因為得票數大於4，所以法
距(γ)為$5\sqrt{2}$，而法角為$45°$ 。

將投票箱內每個邊點取出來，可得知 (2,8), (4,6),
 (5,5), (7,3), (10,0) 五個點構成一直線。

解答完畢

6.4 隨機式方法

隨機抽出 V 內的三個邊點： $v_i=(x_i,y_i)$ 、 $v_j=(x_j,y_j)$ 和 $v_k=(x_k,y_k)$。可決定出三條可能線：$\overline{v_1v_2}$ 、$\overline{v_1v_3}$ 和 $\overline{v_2v_3}$ 。

v_k 到 $\overline{v_iv_j}$ 的距離為：

$$d_{k\to ij}=\frac{\left|(x_j-x_i)y_k+(y_i-y_j)x_k+x_iy_j-x_jy_i\right|}{\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2}} \qquad (6.4.1)$$

三個距離值為 $d_{1\to 23}$、$d_{2\to 13}$ 和 $d_{3\to 12}$。

假設最小的距離值為 $d_{k\to ij}$，則 v_i 和 v_j 這二個邊點便被稱作代理點。代理點形成的直線可被稱作候選線。

$d_{k\to ij}$ 必需小於設定的門檻值。

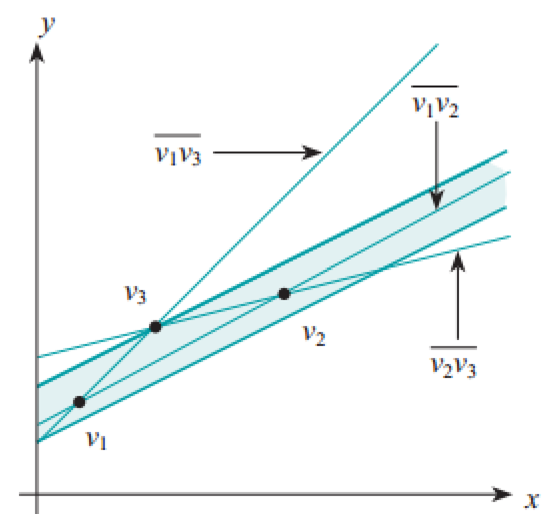


圖6.4.1
三個邊點決定出三條可能線

將邊點集V中的每一邊點，計算其與候選線的距離。若距離小於門檻值，代表該邊點對候選線投了一票，這時計數器C加1。當邊點集V中的每一邊點都完成了上述投票動作後。假設C值大於門檻值，則候選線升級為真正偵測到的線。

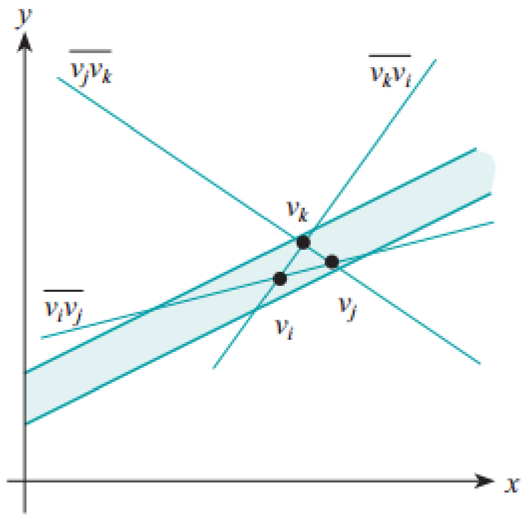


圖6.4.2
三個邊點太靠近的異常例子

重覆上面的程序。設定檢查失敗的容忍最大次數。檢查次數一經超過容忍次數，若仍沒有偵測出直線，則強迫重新進行抽樣的動作。

隨機式測線法的實驗結果

圖6.4.3 地板影像

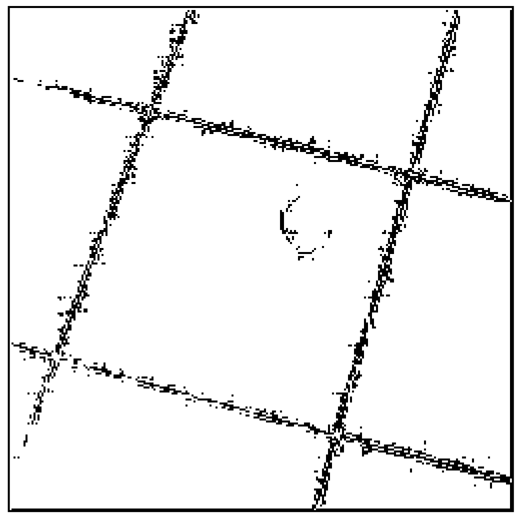


圖6.4.4 圖5.4.3的邊點集

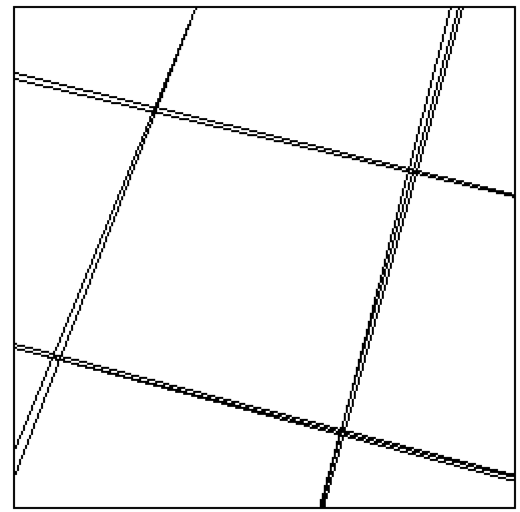


圖6.4.5 測出之直線

比較RHT和RLD的時間複雜度

令 n 代表總邊點數，m 代表落在直線上邊點數。令 $p=\frac{m}{n}$。

A為所抽樣的二個邊點共線的事件，其機率 $P[A]=\frac{m(m-1)}{n(n-1)}$，

B為所抽樣的三個邊點共線的事件，其機率 $P[B]=\frac{m(m-1)(m-2)}{n(n-1)(n-2)}$。

因為 n 和 m 皆很大，所以 $P[A]\approx p^2$而 $P[B]\approx p^3$。

RHT：經過多少次失敗才會使得事件A發生二次為一隨機變數x：

$$f_{RHT}(x)=(x+1)(1-p^2)^x(p^2)^2,\ x=0,1,\ldots$$ [負二項式分配]

RLD：事件B發生過一次，則該候選線即算確定則

$$f_{RLD}(x)=(1-p^3)^x(p^3),\ x=0,1,\ldots$$ [幾何分佈]

RHT和RLD的機率分布

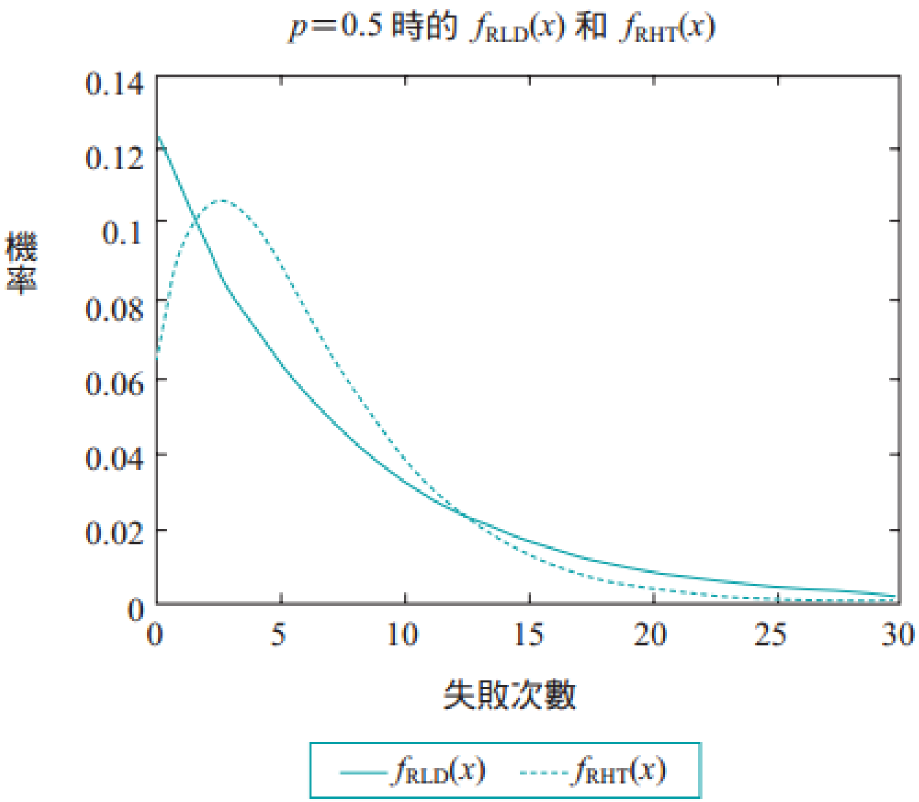


圖6.4.6 p=0.5時的 $f_{RHT}(x)$和 $f_{RLD}(x)$

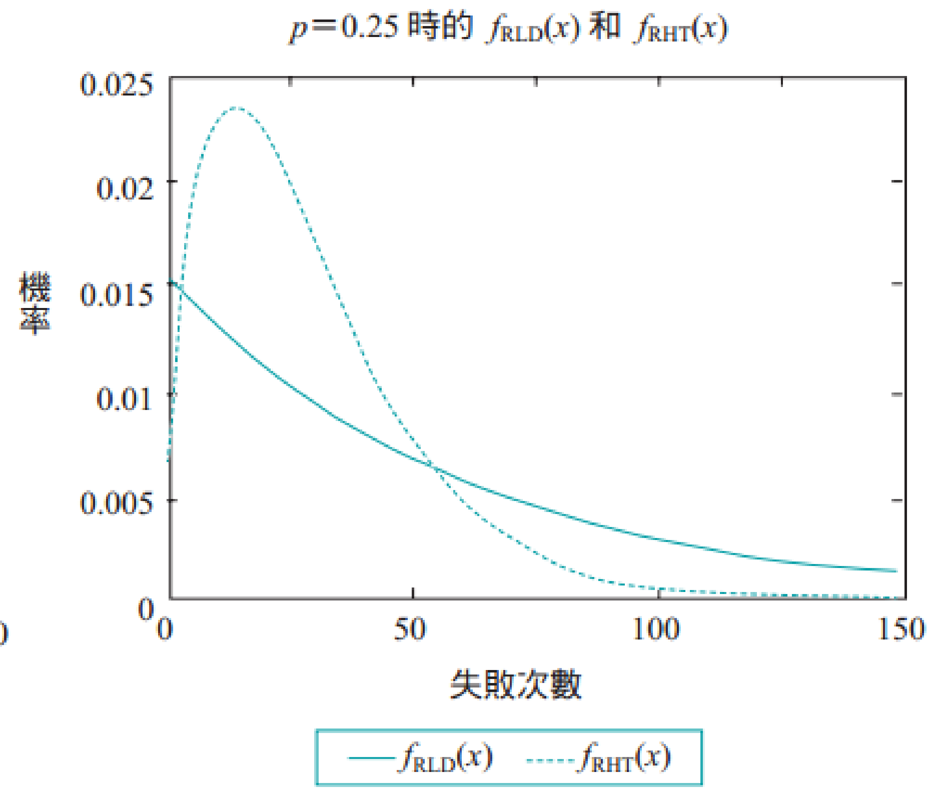


圖6.4.7 p=0.25時的 $f_{RHT}(x)$和 $f_{RLD}(x)$

RHT和RLD的累計分布函數

$$F_{RHT}(x)=\sum_{i\le x} f_{RHT}(i) \quad \text{和} \quad F_{RLD}(x)=\sum_{i\le x} f_{RLD}(i)$$

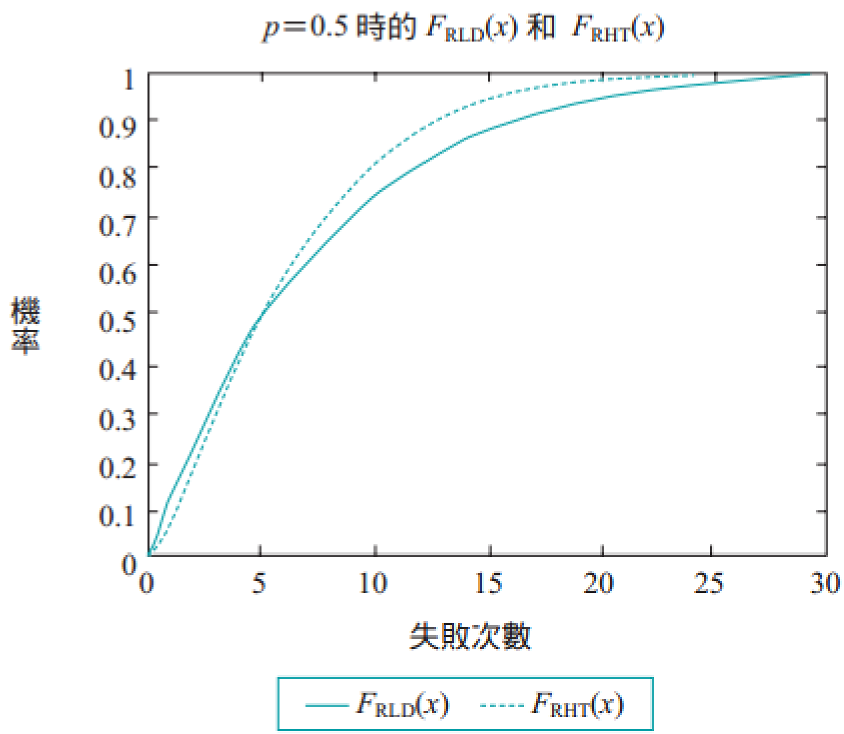


圖6.4.8 p=0.5時的 $F_{RHT}(x)$和 $F_{RLD}(x)$

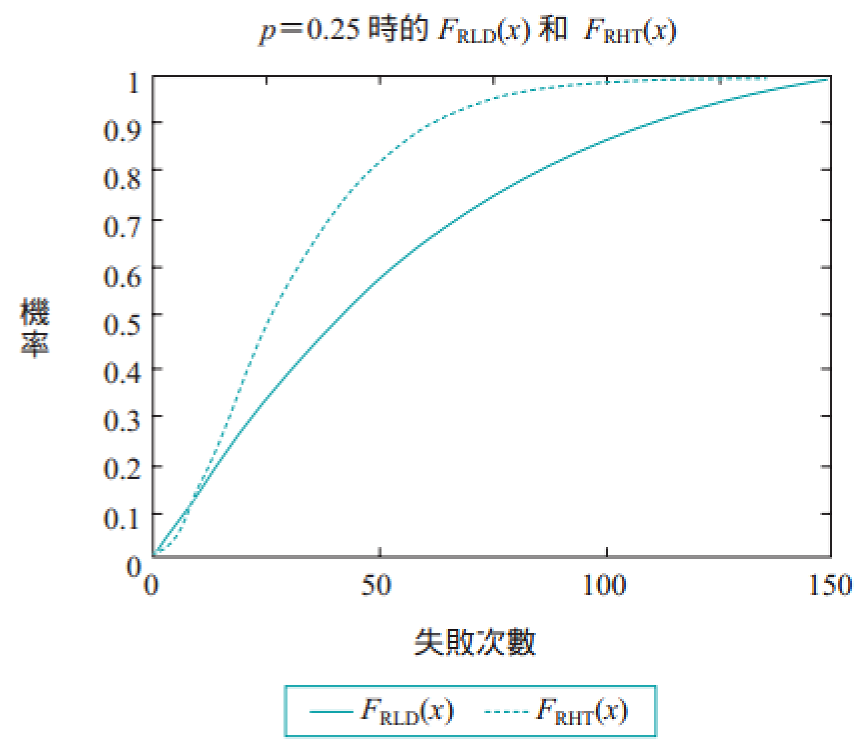


圖6.4.9 p=0.25時的 $F_{RHT}(x)$和 $F_{RLD}(x)$

6.5 道路偵測

- 如圖6.5.1(a)所示，道路邊緣蠻像拋物線的。利用測邊算子，我們可得到圖6.5.1(a)的邊圖如圖6.5.1(b)。

(a) 輸入的道路影像　　(b) 得到的道路邊圖

圖6.5.1

- 根據Kluge[11]的數學模型，形成道路的拋物線上的邊點(c, r)需滿足下式:

$$c = \frac{k}{r} + \beta r + v \qquad (6.5.1)$$

- 上式中k、β和v為待解參數。利用線性代數的技巧可求出這三個參數，進而可得出道路所在的。
- 植基於陣列上的隨機式演算法可用來實現上式的求解。
- 在邊圖上抽取出四個邊點，將其中的三個邊點代入式(6.5.1)，解出來的三個參數k、β和v可用來決定描述道路邊緣的拋物線。

- 令選用的三個邊點座標為 (c_0, r_0)、(c_1, r_1)、(c_2, r_2)，代入式(6.5.1)後，可以得到下列的3×3線性系統:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} & r_0 & 1 \\ \frac{1}{r_1} & r_1 & 1 \\ \frac{1}{r_2} & r_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \beta \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad (6.5.2)$$

- 利用高斯消去法，式(6.5.2)中的三個參數k、β和v就可解出了。圖6.5.1(b)的道路邊緣圖示於圖6.5.2。