第四章
測邊

內容

- 4.1 前言
- 4.2 拉普拉斯算子
- 4.3 Marr-Hildreth算子
- 4.4 基底投射法
- 4.5 輪廓追蹤法

4.1 前言

- 介紹前置處理(Preprocessing)中的測邊(Edge Detection)技巧。

4.2 拉普拉斯算子

對 $f(x, y)$ 沿 x 軸差分：

$$\nabla_x f = f(x+1, y) - f(x, y)$$

再對 x 軸差分得：

$$\nabla_x^2 f = f(x+2, y) - f(x+1, y) - [f(x+1, y) - f(x, y)]$$
$$= f(x+2, y) - 2f(x+1, y) + f(x, y)$$

令 $x=x+1$ ，可得：

$$\nabla_x^2 f = f(x+1, y) - 2f(x, y) + f(x-1, y)$$

同理，沿著 y 軸差分二次得：

$$\nabla_y^2 f = f(x, y+1) - 2f(x, y) + f(x, y-1)$$

合併可得拉普拉斯算子：

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \nabla_x^2 f + \nabla_y^2 f \\ &= f(x, y+1) + f(x+1, y) + f(x, y-1) + f(x-1, y) - 4f(x, y)\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

- 圖4.2.5面罩的數學背景來源為式(4.2.1)

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

圖4.2.5 拉普拉斯測邊算子

- 使用拉普拉斯算子來測邊：
  如果能滿足$\nabla^2 f(x-1,y)$和 $\nabla^2 f(x+1,y)$ 的值呈現一個是正數另一個為負數，且$\left|\nabla^2 f(x+1,y)-\nabla^2 f(x-1,y)\right|$ 大於門檻值 *T*的情況，我們就宣稱(*x*, *y*)的位置上有一個邊點。
  相同的，若是$\nabla^2 f(x,y-1)$和$\nabla^2 f(x,y+1)$滿足上述條件，我們也可以將位置(*x*, *y*)上的像素視為一個邊點。

通過零點(Zero-crossing)

- 主要觀念:灰階的突然變化(Abrupt Change) 。
- 一次微分後形成的波峰(Peak)超過門檻值(Threshold)，有邊點形成。
- 二次微分:通過零點(Zero Crossing)觀念。

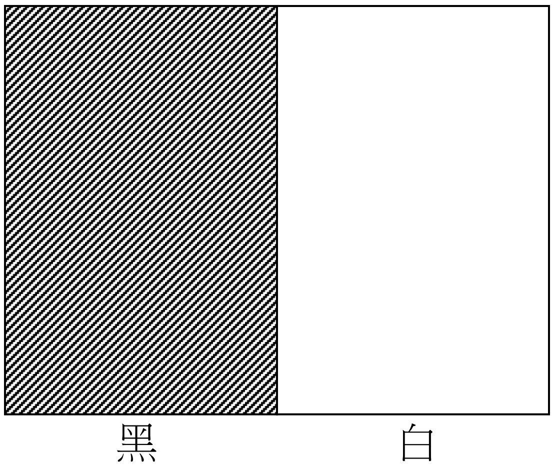


圖4.2.1
兩個同質但不同色的區域

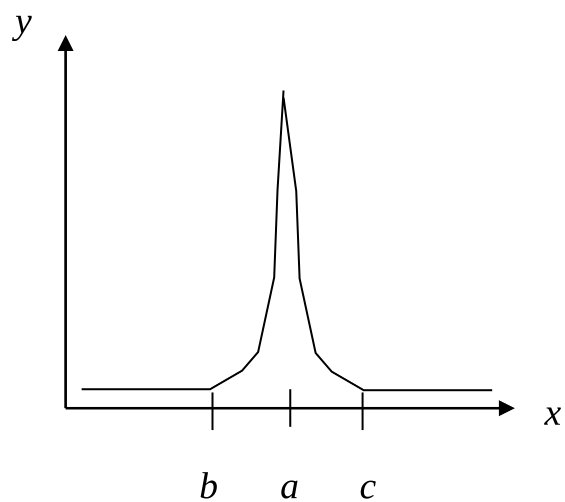


圖4.2.2
圖4.2.1的一次微分結果

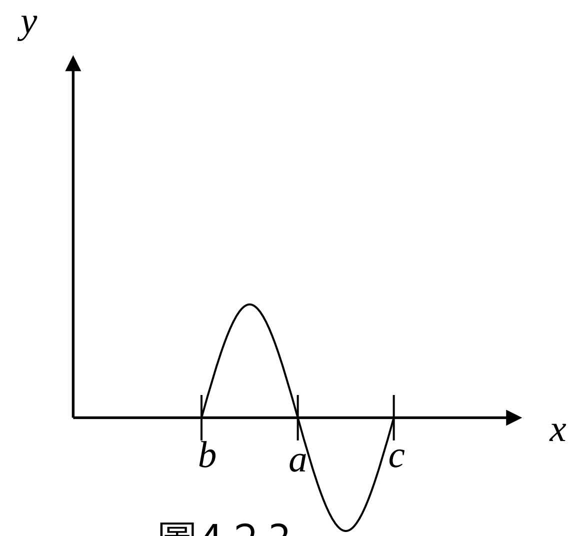
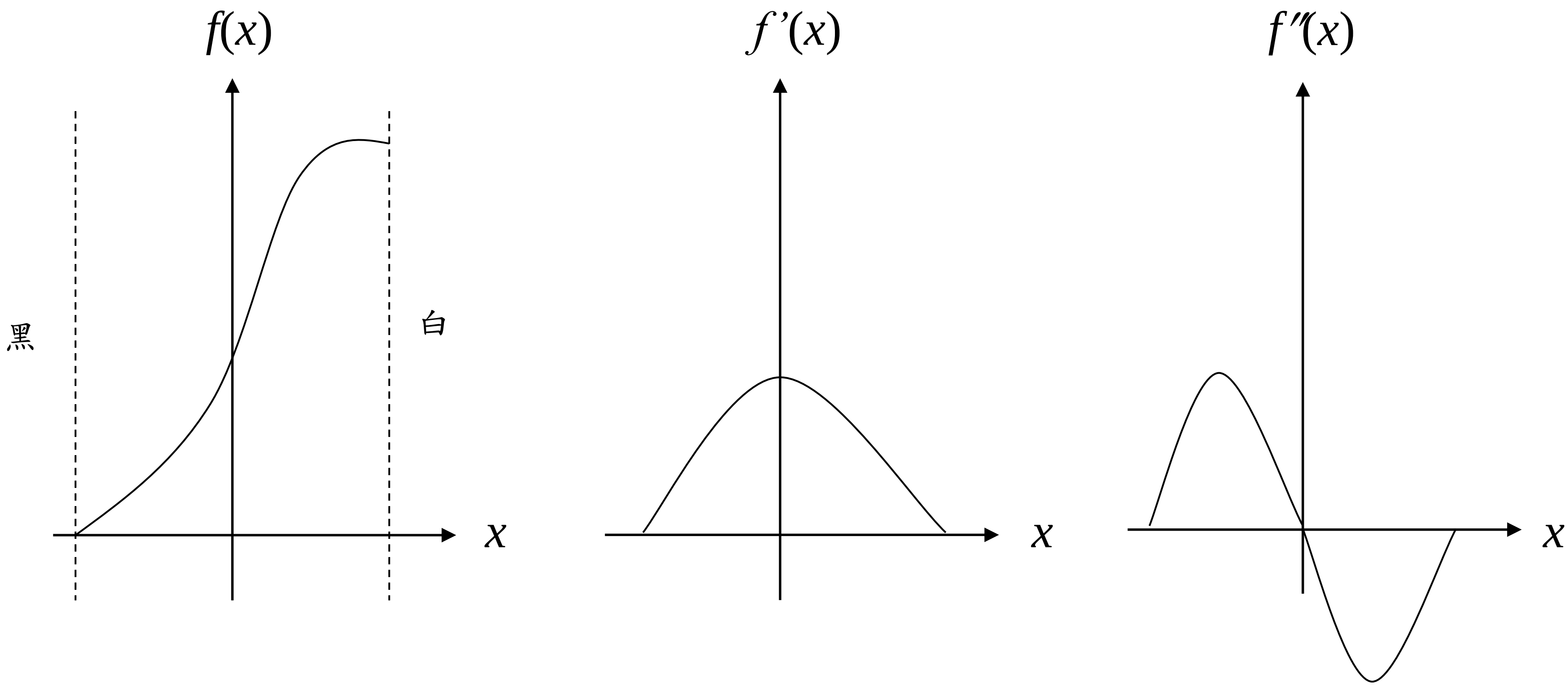


圖4.2.3
通過零點示意圖

- 通過零點的另一個示意圖 。



(a)兩個同質但不同色的區域 (b)一次微分結果 (c)通過零點示意圖

圖4.2.4 通過零點的另一個示意圖

Sobel測邊算子

- Sobel測邊算子，其對應的面罩有兩個，一個為*x*方向，另一個為*y*方向。
- 從 $\nabla_x f$ 和 $\nabla_y f$ 的兩個分量，我們可知合成的量(Magnitude)為

  $\sqrt{(\nabla_x f)^2 + (\nabla_y f)^2}$ ，

  而角度為 $\theta = \tan^{-1} \dfrac{\nabla_y f}{\nabla_x f}$ 。
- 為了計算更快速，

  以 $|\nabla_x f| + |\nabla_y f|$ 的運算取代 $\sqrt{(\nabla_x f)^2 + (\nabla_y f)^2}$ 的運算。
- 另外有一個很類似Sobel測邊算子的方法 - Prewitt算子。

−1	−2	−1
0	0	0
1	2	1

−1	0	1
−2	0	2
−1	0	1

(a) 測 *y*方向的灰階變化 (b) 測 *x*方向的灰階變化

圖4.2.8 Sobel測邊算子

−1	−1	−1
0	0	0
1	1	1

−1	0	1
−1	0	1
−1	0	1

(a) 測 *y*方向的灰階變化 (b) 測 *x*方向的灰階變化

圖4.2.9 Prewitt算子

範例3：給一如下的5×5子影像，請使用Prewitt算子來測邊，這裡假設門檻值 T 為78。

15	39	42	27	12
12	21	48	15	9
9	21	27	12	3
18	15	33	18	18
45	60	57	24	21

解答：

	(1)	(2)	(3)	
	(4)	(5)	(6)	
	(7)	(8)	(9)	

圖4.2.10(a)
為使用Prewitt算子得到的相關資訊

圖4.2.10(b)利用Prewitt算子得到的結果

$\nabla_x f$	$\nabla_y f$	$\lvert\nabla_x f\rvert+\lvert\nabla_y f\rvert$
(1) -6-18-15=-39	27+36+18=81	39+81 = 120 > T
(2) 18+15+15=48	-12-6-24=-27	48+27 = 75
(3) 15+15+9=39	-30-39-24=-93	39+93 = 132 > T
(4) -6+6+15=15	36+18+15=69	15+69 = 84 > T
(5) 6+15-3=18	-6-9+3=-12	18+12 = 30
(6) -15+3+9=-3	-39-24-15=-78	3+78 = 81 > T
(7) 36+39+30=105	18+15+12=45	105+45 = 150 > T
(8) 39+30+12=81	-9+3-36=-42	81+42 = 123 > T
(9) 30+12+18=60	-24-15-36=-75	60+75 = 135 > T

從圖4.2.10中可得知像素(1)、(3)、(4)、(6)、(7)、(8)和(9)皆為邊點，所以最後測邊結果為一個如下的倒ㄇ字型。

	X		X	
	X		X	
	X	X	X	

解答完畢

4.3 Marr-Hildreth算子

- Marr-Hildreth測邊算子結合了高斯平滑算子和拉普拉斯算子的雙重技巧。
- 高斯平滑算子(Gaussian Smoothing Operator)：

$$G(x,y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \tag{4.3.1}$$

- LOG (Laplacian of Gaussian)：

$$LOG=\nabla^2\left[G(x,y,\sigma)*f(x,y)\right] \tag{4.3.2}$$

$*$ 表迴積運算，而 ∇^2 表拉普拉斯算子。

➔ 結合性

$$LOG=[\nabla^2 G(x,y,\sigma)]*f(x,y) \tag{4.3.3}$$

令 $r^2 = x^2 + y^2$，則 $G(x,y,\sigma) = e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}$，對 x 微分一次，得 $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{-x}{\sigma^2} e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}$

再對 x 微分一次，得 $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sigma^2} e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}} + (-\frac{x}{\sigma^2})(-\frac{x}{\sigma^2}) e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2}(\frac{x^2-\sigma^2}{\sigma^2}) e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}$

同理，我們可推得 $\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{-y}{\sigma^2} e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}$ $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{1}{\sigma^2}(\frac{y^2-\sigma^2}{\sigma^2}) e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}$

綜合以上推演，可得 $\nabla^2 G(x,y,\sigma) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{1}{\sigma^2}(\frac{x^2+y^2-2\sigma^2}{\sigma^2}) e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}$

代入式子(4.3.3) ，可得 $LOG = \frac{1}{\sigma^2}(\frac{x^2+y^2}{\sigma^2} - 2) e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}} * f(x,y)$

為得到一個面罩且其面罩內的加權和為零，
我們令*LOG*的面罩形式如下所示，這裡的常數c是用來正規化用的
。

$$LOG = c(\frac{x^2+y^2-2\sigma^2}{\sigma^4}) e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

範例1：可否對式(4.3.4)多做解釋?

解答：

假設面罩大小為5×5，各像素的位置定義如下：

(-2,2)	(-1,2)	(0,2)	(1,2)	(2,2)
(-2,1)	(-1,1)	(0,1)	(1,1)	(2,1)
(-2,0)	(-1,0)	(0,0)	(1,0)	(2,0)
(-2,-1)	(-1,-1)	(0,-1)	(1,-1)	(2,-1)
(-2,-2)	(-1,-2)	(0,-2)	(1,-2)	(2,-2)

將面罩內25個位置座標代入 (x, y)內

$$\frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

*	*	O	*	*
*	O	x	O	*
O	x	Δ	x	O
*	O	x	O	*
*	*	O	*	*

上面的分類中，打 * 號的值為趨近於零;打 Δ 、x、和O號的
值都不大，但是以16：-2：-1的比例呈現。

解答完畢

正規化後則可得下列面罩：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 16 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.3.4)$$

圖4.3.1 測試影像

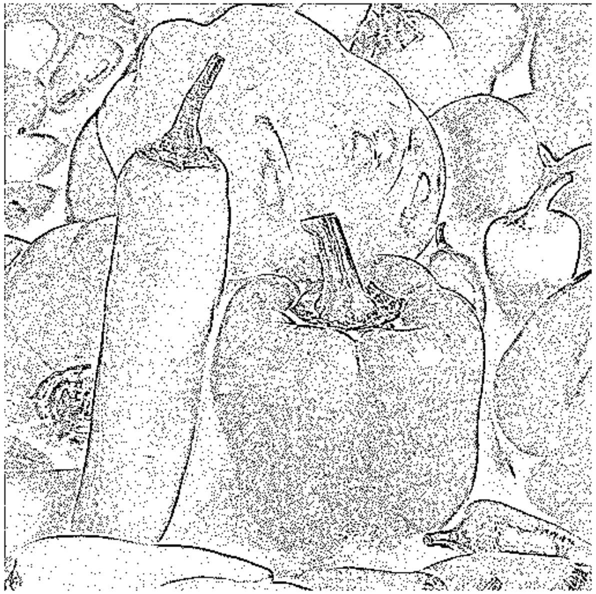


圖4.3.2 利用Marr-Hildreth算子測邊後的結果

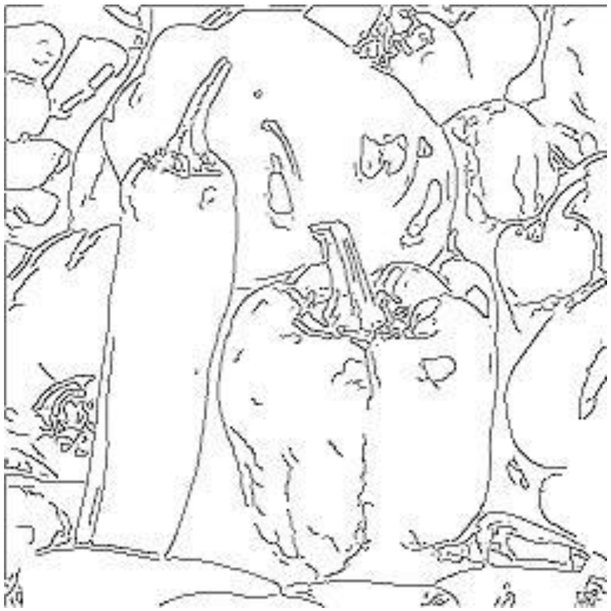


圖4.3.3 利用Canny測邊法所得到的邊圖(Edge Map)

- Canny首先利用高斯平滑算子去除過多的細紋，然後在每個像素上計算其梯度方向和梯度量。假若在這梯度方向上，該像素的梯度量大於二個鄰居的量，則該像素為邊點，否則為非邊點。較弱的邊點可利用磁滯(Hysteresis)門檻化予以去除。

4.4 基底投射法

- 在圖4.4.1中任挑二個不同向量，皆可檢定出內積為零，從而知道這九個向量兩兩為正交的。
- 令圖4.4.1中的九個向量分為 v_1、v_2、…和 v_9，則 $w_1=\dfrac{v_1}{\|v_1\|}$、$w_2=\dfrac{v_2}{\|v_2\|}$、… $w_9=\dfrac{v_9}{\|v_9\|}$ 和可另外構成一組正交且單位化的基底。

1	$\sqrt{2}$	1
0	0	0
-1	$-\sqrt{2}$	-1

(a)

1	0	-1
$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$
1	0	-1

(b)

0	-1	$-\sqrt{2}$
1	0	-1
$\sqrt{2}$	1	0

(c)

$\sqrt{2}$	-1	0
-1	0	1
0	1	$-\sqrt{2}$

(d)

0	1	0
-1	0	-1
0	1	0

(e)

-1	0	1
0	0	0
1	0	-1

(f)

1	-2	1
-2	4	-2
1	-2	1

(g)

-2	1	-2
1	4	1
-2	1	-2

(h)

1	1	1
1	1	1
1	1	1

(i)

圖4.4.1 基底

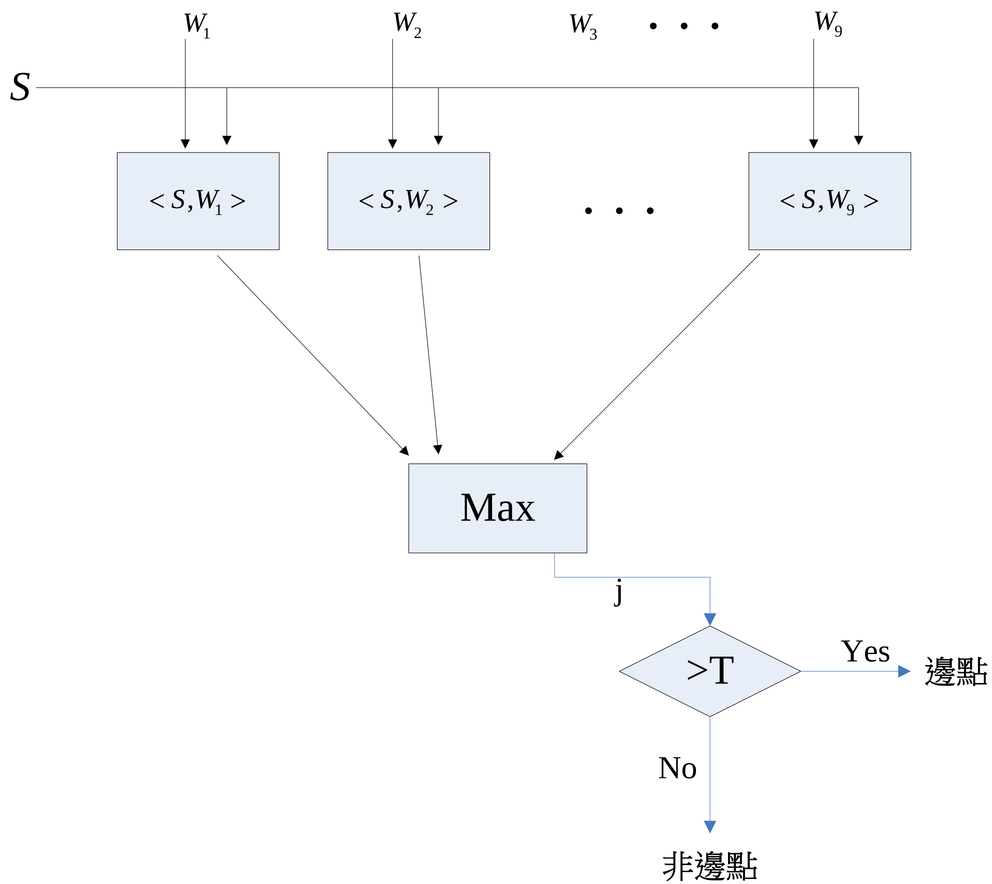
- 視窗所框住的3×3子影像，依列優先(Row Major Order)的順序得向量$z=(z_1,z_2,...,z_9)^t$ 。對上述九個正交且單位化的基底投影，可得$m_1=z^t\cdot w_1$、$m_2=z^t\cdot w_2$、 ... 和 $m_9=z^t\cdot w_9$。令

$$m=\max\{m_1,m_2,...,m_9\}$$

  假設m對應的基底之向量為圖4.4.1(a)，則代表有水平紋理邊點。若對應的為圖4.4.1(i)，則表z在平滑區域。
- 實作時，引入門檻值，依迴積方式進行。
- 缺點:有些基底向量的意義不明確。

範例1：以上的九個基底向量為何要化成單位正交向量? 可否給一個示意圖以明示基底投射法的觀念?

解答：



解答完畢

4.5 輪廓追蹤法

- 在物體邊緣外側邊緣標識一圈控制點集(可利用雲形曲線集)。
- 能量函數 $E=\int\left(\alpha(t)E_{cont}+\beta(t)E_{curv}+\gamma(t)E_{image}\right)dt$ (4.5.1)

$$E_{cont}=\left\|\frac{dc(t)}{dt}\right\|^2=\left\|b_i-b_{i-1}\right\|^2$$ ➔ 微分一次後連續項能量

$$E_{curv}=\left\|\frac{d^2c(t)}{dt^2}\right\|^2=\left\|b_{i-1}-2b_i+b_{i+1}\right\|^2$$ ➔微分二次後平滑項能量

$$E_{image}=-\left\|\nabla I\right\|$$ ➔輪廓受到往影像邊點處的拉力

$c(t)$ 為影像中初步用雲形曲線框住的輪廓且輪廓上構成的點為 b_1 、b_2、b_3 ...和 b_n。通常 α_i、 β_i和 γ_i可定為1，但是若碰到角點(Corner Point)時， β_i可定為0。

- 正規化能量項：

  E_{curv} 和 E_{cont} 可除以視窗內相關能量的最大值。

  E_{image}中的 $\|\nabla I\|$ 可改為 $\dfrac{\|\nabla I\|-m}{M-m}$，這裡$m$代表鄰近$\|\nabla I\|$ 的最小值，而M代表鄰近 $\|\nabla I\|$的最大值。

- 從 b_1 出發，首先以3 × 3 視窗將點 b_1 框住，針對視窗內的每一點計算其能量。移往能量和所得為最小的點。直到n個點都處理完。不斷地進行疊代直到輪廓不再改變為止。

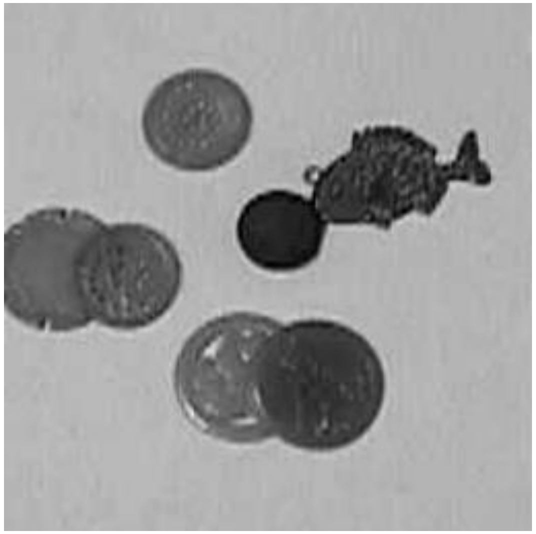


圖4.5.1 輸入的影像

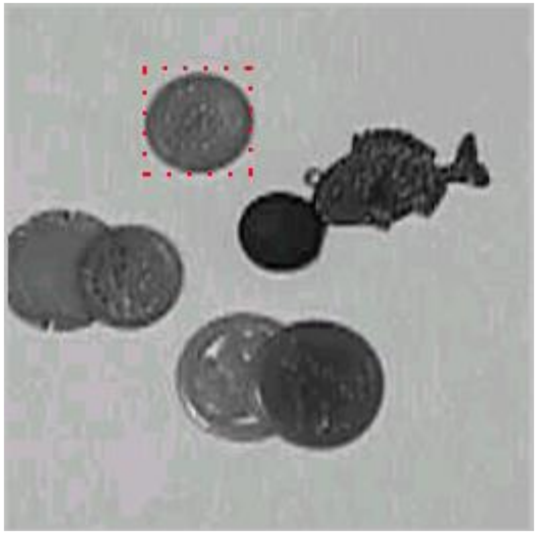


圖4.5.2 初始輪廓

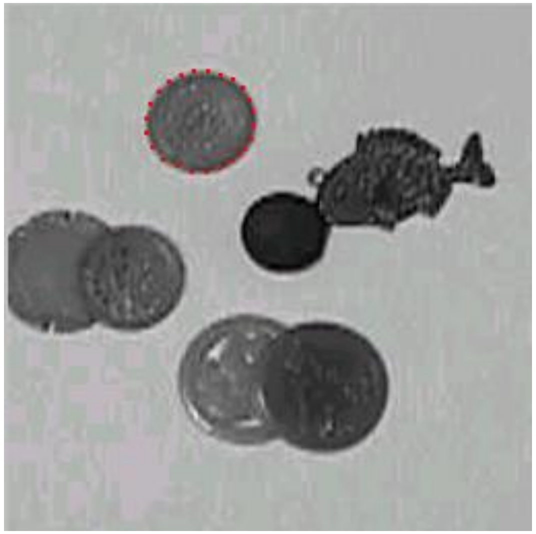


圖4.5.3 最終所找到的輪廓