第二章
型態學、DCT、人臉定位與FFT

內容

- 2.1 前言
- 2.2 型態學
- 2.3 離散餘弦轉換(DCT)
- 2.4 人臉定位
- 2.5 傅利葉轉換
- 2.6 傅利葉轉換的性質

2.1 前言

- 介紹形態學及其應用、離散餘弦定理、人臉定位、傅立葉轉換及其性質。

2.2 型態學

A:待處理的區塊集; *B*:**結構化元素集**(Structuring Elements)

- **擴張**運算

$$D(A,B) = A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A + b$$

- **侵蝕**運算

$$E(A,B) = A \ominus (-B) = \bigcap_{b \in -B} A + b$$

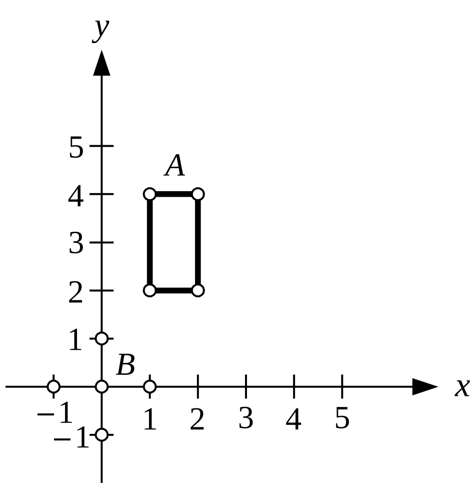


圖1.6.1.3 集合A和B

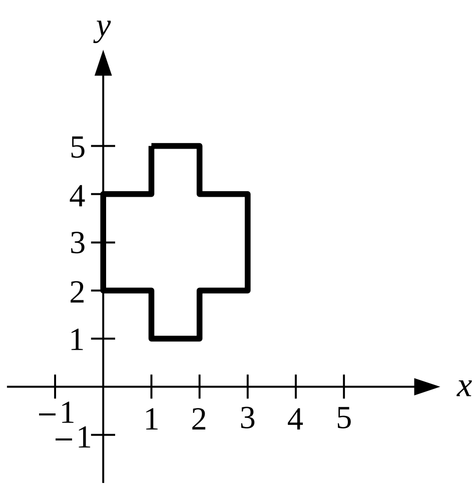


圖1.6.1.4 D(A,B)

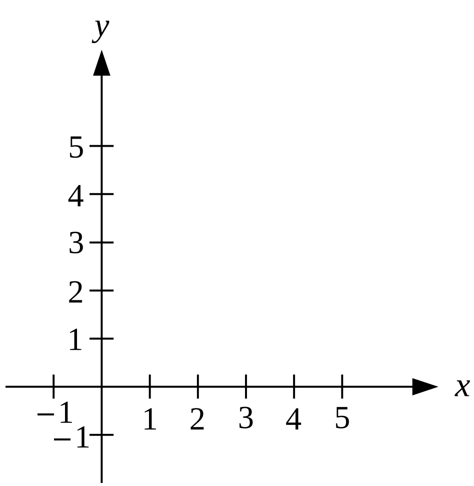
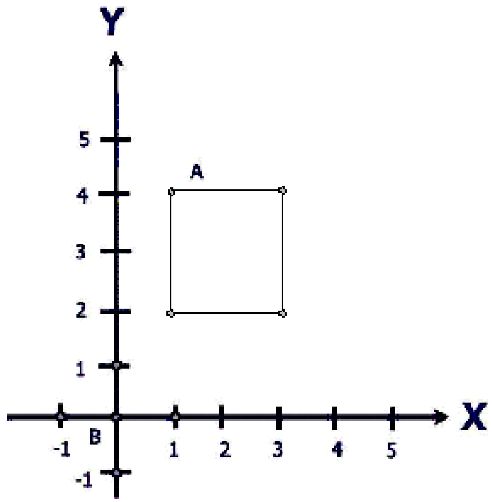


圖1.6.1.5 E(A,B)

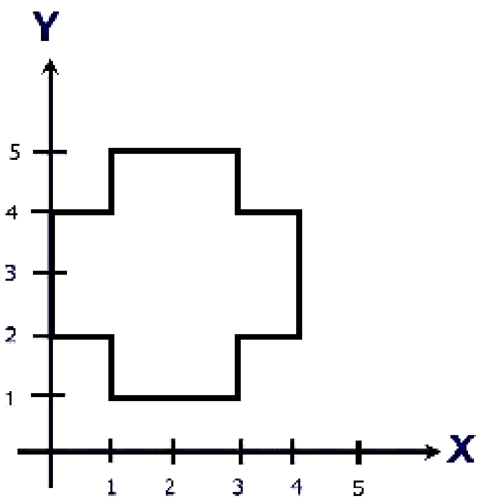
範例1：今將圖2.1.1的區塊集A改成下圖所示的區塊：



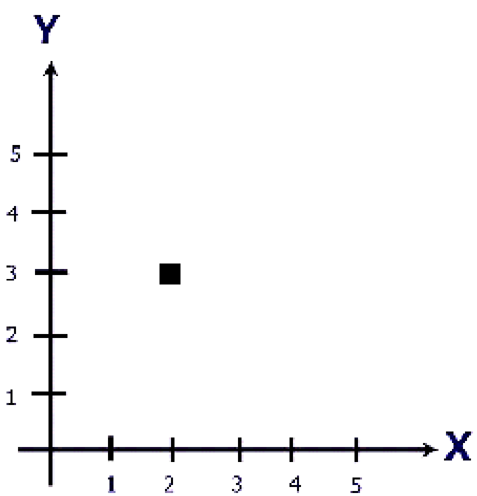
試求$D(A, B)$和$E(A, B)$。

解答：

$D(A,B)\overset{\Delta}{=}$

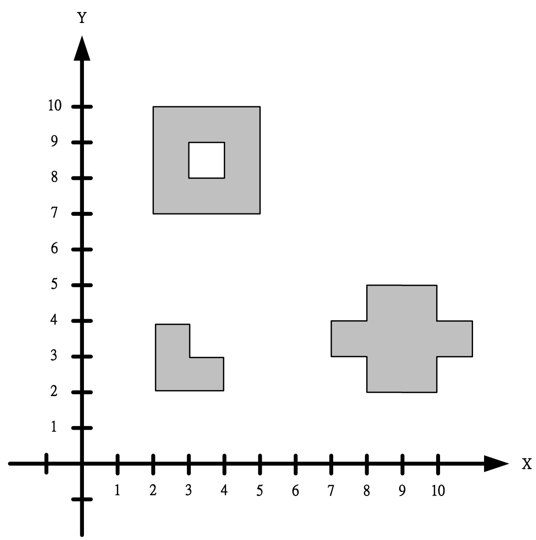


$E(A,B)\overset{\Delta}{=}$



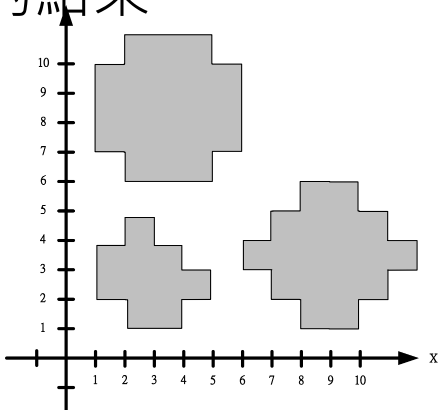
解答完畢

範例2：延用圖2.2.1的結構化元素集B，請分別算出此三區塊集經開放算子及封閉算子運算後的結果，並加以說明。

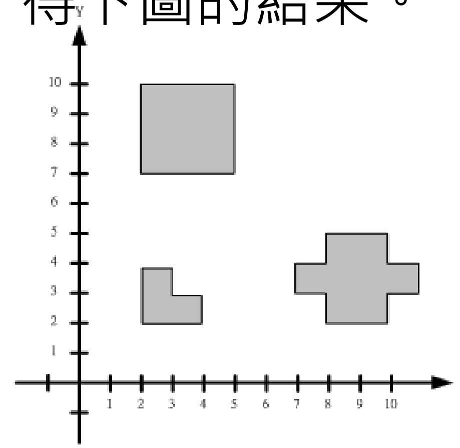


解答：

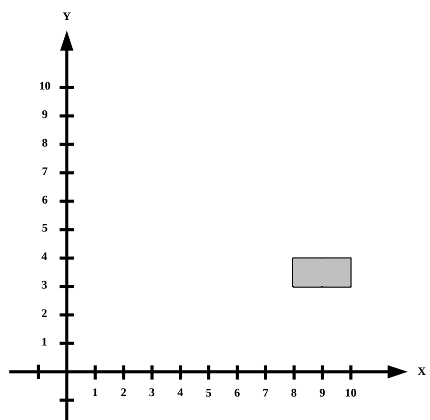
封閉算子:擴張再侵蝕。
經由擴張運算可以得到下圖的結果。



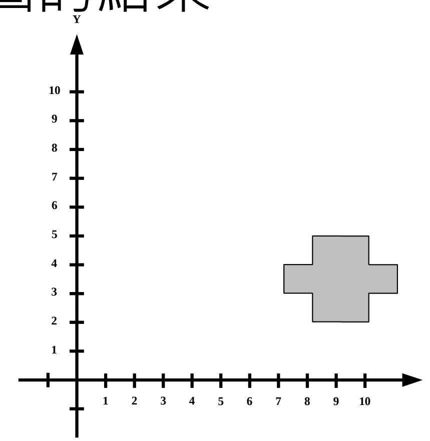
將擴張運算所得區塊集進行侵蝕運算，得下圖的結果。



開放算子:侵蝕再擴張
經由侵蝕運算可以得到下圖



將侵蝕運算所得區塊集進行擴張運算得下圖的結果。



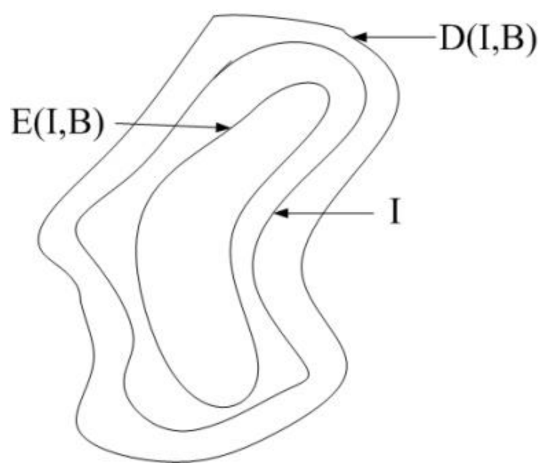
此即為封閉算子運算後的結果。

解答完畢

範例3：如何利用擴張運算子*D*和侵蝕運算子*E*以求得影像中輪廓的外圍？

解答：

I ：原影像。 *D*(*I*, *B*) 將影像的輪廓擴張；*E*(*I*, *B*)可將影像的輪廓侵蝕。[*D*(*I*, *B*)-*E*(*I*, *B*)]:物體的輪廓外圍，這裏的‘-’代表兩影像相減。：



介於*D*(*I*,*B*)和*E*(*I*,*B*)之間的環形區域可視為物體*I*的輪廓。

解答完畢

- 將形態學推廣到灰階影像。
- 膨脹算子

$$D(I, B)(i, j) = \max\{I(i+m, j+n) + B(m, n),\ m, n \in \text{Domain of } B\}$$

- 侵蝕算子

$$E(I, B)(i, j) = \min\{I(i+m, j+n) - B(m, n),\ m, n \in \text{Domain of } B\}$$

- 令灰階影像的左上角 3×3 子影像為 *I* 和結構化元素集 *B* 如下所示：

$$I' = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 50 & 55 & 60 \\ \hline 45 & 55 & 60 \\ \hline 30 & 20 & 10 \\ \hline\end{array} \qquad B = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 3 \\ \hline\end{array}$$

- 依據以下計算

$$D(I', B)(1,1) = \max(50+1, 55+2, 60+1, 45+3, 55+1, 60+2, 30+1, 20, 10+3)$$
$$= 62$$
$$E(I', B)(1,1) = \min(50-1, 55-2, 60-1, 45-3, 55-1, 60-2, 30-1, 20, 10-3)$$
$$= 7$$

- 膨脹運算作用後的I' 改變為

$I' =$

50	55	60
45	62	60
30	20	10

- 侵蝕後的I' 改變為

$I' =$

50	55	60
45	7	60
30	20	10

2.3 離散餘弦轉換

- DCT

令 $f(x,y)$ 為框框內位於(x,y)的灰階值減去128，則**DCT**的計算公式如下

$$D(i,j)=\frac{1}{\sqrt{2N}}C(i)C(j)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\frac{(2x+1)i\pi}{2N}\cos\frac{(2y+1)j\pi}{2N} \qquad (2.3.1)$$

$$c(i)=\begin{cases}1/\sqrt{2} & ,i=0\\ 1 & ,otherwise\end{cases} \qquad c(j)=\begin{cases}1/\sqrt{2} & ,j=0\\ 1 & ,otherwise\end{cases}$$

- IDCT

$f(x,y)$也可透過**IDCT**(inverse DCT)得到，公式如下

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2N}}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}C(i)C(j)D(i,j)\cos\frac{(2x+1)i\pi}{2N}\cos\frac{(2y+1)j\pi}{2N} \qquad (2.3.2)$$

透過式子(1.6.2.2)求得$f(x,y)$後再加上128即可得到位於影像中(x,y)位置的原始灰階值。

- **DC**(Direct Current、直流值)

$$D(0,0)=\frac{1}{\sqrt{2N}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos 0\cos 0=\frac{1}{2\sqrt{2N}}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$

此處 N=8，則

$$D(0,0)=\frac{1}{8}\sum_{x=0}^{7}\sum_{y=0}^{7}f(x,y)$$

- **AC**(Alternative Current、交流值)

20	23	12	5	7	9	22	30
22	32	16	5	8	12	11	23
29	32	16	11	70	30	20	20
100	142	3	45	44	200	50	22
103	120	33	41	200	50	22	70
120	210	22	123	23	70	69	160
12	222	24	126	90	20	6	60
212	252	243	26	149	221	61	90

圖2.3.1 8x8的灰階圖案及其灰階值

-481	107	41	57	-26	-159	-43	-70
-316	-104	-11	14	32	100	18	41
0	41	9	-67	-56	9	47	40
-49	-29	37	-77	85	10	-91	-43
114	26	-9	103	-49	-26	86	53
-60	-17	-23	-9	-22	12	-55	-94
64	-7	56	-2	-7	27	43	12
-74	-4	-77	-25	74	-41	-44	103

圖2.3.2 DCT後的結果

範例2：當$D(0, 0)>1000$時，原8×8灰階影像為何種影像？

解答：

令全黑的灰階值為0，而全白的灰階值為255。已知

$$D(0,\ 0) = 8\sum_{x=0}^{7}\sum_{y=0}^{7}\frac{1}{64}f(x,\ y) > 1000$$

原8×8灰階影像可能為一幾近全白的平滑影像。

解答完畢

圖2.3.3為DCT後的頻率域之紋理方向示意圖。通常若框住皮膚色的框框是臉部時，在高頻區會有一些較大的係數表現。當DC值過小時和AC值過大，可進一步判斷有臉部的框框。

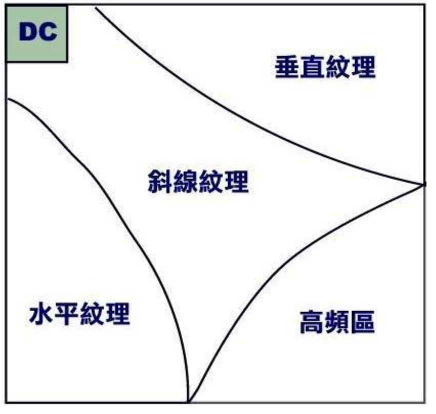


圖2.3.3
DCT頻率域的紋理方向示意圖

2.4 人臉定位

圖2.4.1 輸入的影像

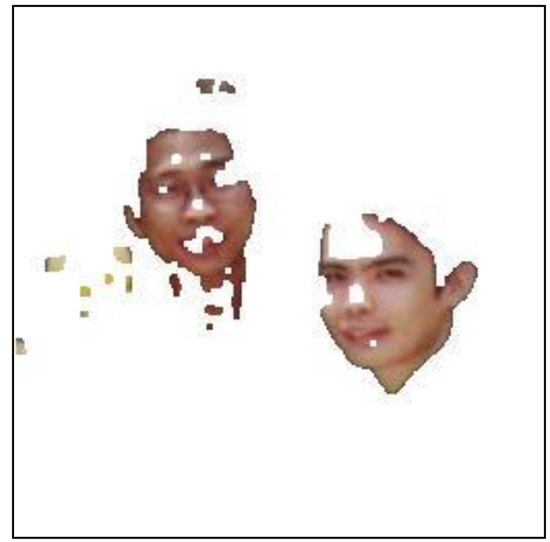


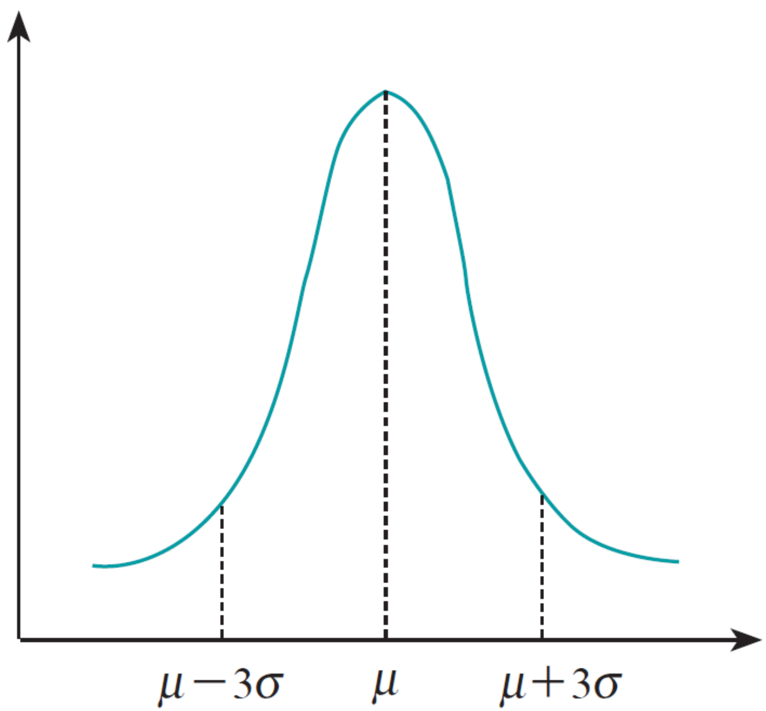
圖2.4.2皮膚色所在

- **封閉**(Closing)算子
- **開放**(Opening)算子

問題：如何利用色調範圍來過濾皮膚色?

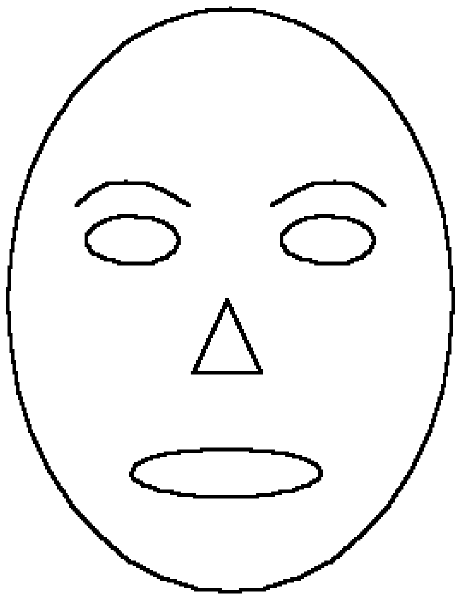
解答：

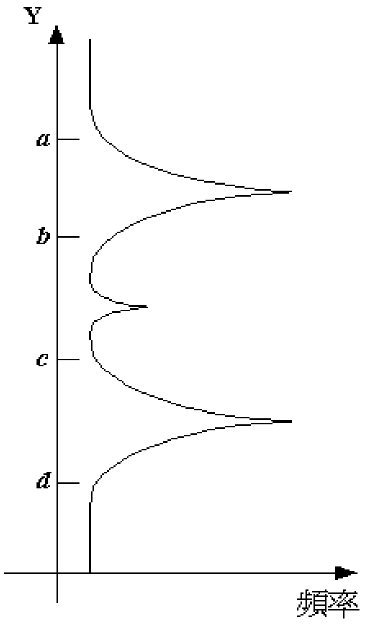
首先利用人工點選的方式，將所有訓練影像中的皮膚色予以框出來，然後將色調抽取出來，並且將統計出來的平均值 μ和標準差 σ用於濾波器的設計，下面為其示意圖：



問題：如何在臉部上找出眼睛和嘴巴的部位？
解答：

利用**水平投射法**(Horizontal Projection)





我們可發現在(*a*, *b*)和(*c*, *d*)兩區間有頻率較高的波峰(Peak)，依位置而言，可合理推估(*a*, *b*)區間為眼部所在，而(*c*, *d*)區間為嘴巴所在，畢竟這兩個部分的邊點數是較多的。

解答完畢

2.5 傅利葉轉換

給一週期函數(Periodic Function) *g*(θ)， $0 \le \theta \le 2\pi$，傅利葉原先的想法是將*g*(θ)用有正交性(Orthogonality)的傅利葉基底(Basis)來表示。這些正交的基底為cosθ、cos2θ、cos3θ、…、sinθ、sin2θ、sin3θ、…， $0 \le \theta \le 2\pi$ 。

- **正交性**

$$\cos m\theta \cos n\theta = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta\right]$$

當$m \ne n$時， $$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0$$

$m = n \ne 0$時， $$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \pi$$

$m = n = 0$時， $$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 2\pi$$

- 求解傅利葉係數

有了傅利葉基底後，$g(\theta)$可表示成

$$g(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta\right] \qquad (2.5.1)$$

則從

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos m\theta d\theta=\begin{cases}\pi a_m, m\neq 0\\ \pi a_0, m=0\end{cases}$$

可推得

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos m\theta d\theta, m=0,1,2,\ldots$$

從

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin m\theta d\theta=\pi b_m (m\neq 0)$$

可推得

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin m\theta d\theta, m=1,2,3,\ldots$$

範例1： 令 $g(\theta)=\theta, -\pi<\theta\le\pi$ 且其對應的圖如2.5.1所示。試求出 $g(\theta)$ 的傅利葉展開。

解答：

令 $g(\theta)=\theta, -\pi<\theta\le\pi$

$$\Rightarrow a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta\cos k\theta d\theta=0$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta\sin k\theta d\theta=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\theta d\left(\frac{-\cos k\theta}{k}\right)$$

$$=-\frac{2}{k}\cos k\pi=\frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

$$\Rightarrow g(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin k\theta$$

$$=2[\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta+\ldots]$$

$\Rightarrow S_1=2\sin\theta$ 只取第一項

$S_2=2[\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta]$ 只取前二項

$S_3=2[\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta]$ 只取前三項

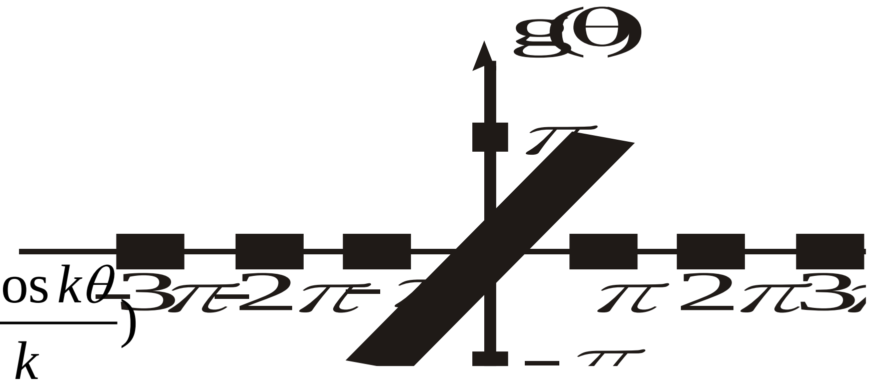


圖2.5.1 $g(\theta)$

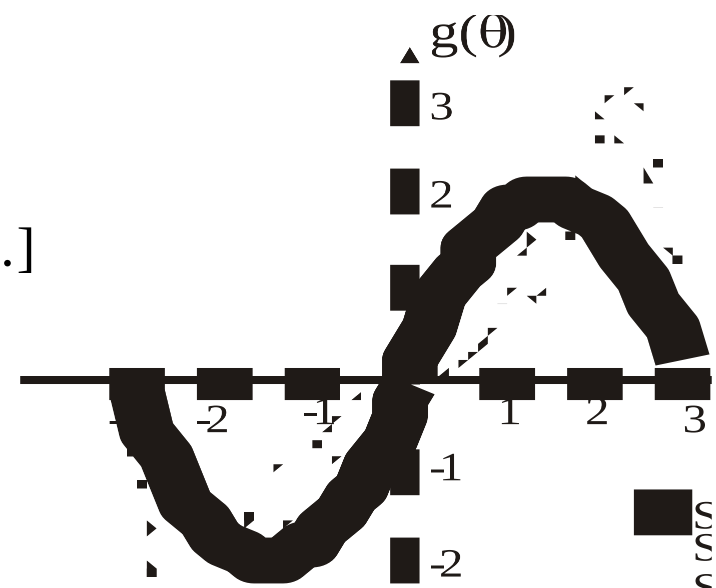


圖2.5.2 $g(\theta)$的三個近似圖

解答完畢

- FFT

令 $W_N^j = e^{\frac{2\pi j}{N} i}$ 為1的**基本根**(Primitive Root)且滿足 $W_N^N = 1$。若N=8時，傅利葉矩陣為

$$F_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 & 1 & W^6 & W^4 & W^2 \\ 1 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{pmatrix}$$

FFT可 在 $O(N\log N)$ 時間內完成，首先將 $\vec{X}$ 分成偶半部和奇半部，分別表示成

$$\vec{X}_o = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_5 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} \qquad \vec{X}_e = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_2 \\ X_4 \\ \vdots \\ X_{N-2} \end{pmatrix}$$

令 $\vec{u} = F_{N/2}\vec{X}_e$ 和 $\vec{v} = F_{N/2}\vec{X}_o$。利用算出的 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ ，可得

$$y_i = \begin{cases} u_i + W_N^i v_i, & 0 \le i < \dfrac{N}{2} \\ u_{i-N/2} + W_N^i v_{i-N/2}, & \dfrac{N}{2} \le i < N \end{cases} \qquad (2.5.2)$$

當 $0 \le i < N/2$

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{0 \le j < N} W_N^{ij} X_j \\ &= \sum_{\substack{\text{偶數}j \\ 0 \le j < N}} W_N^{ij} X_j + \sum_{\substack{\text{奇數}j \\ 0 \le j < N}} W_N^{ij} X_j \\ &= \sum_{0 \le k < N/2} W_N^{2ki} X_{2k} + \sum_{0 \le k < N/2} W_N^{i(2k+1)} X_{2k+1} \\ &= \sum_{0 \le k < N/2} W_{N/2}^{ik} X_{2k} + W_N^i \sum_{0 \le k < N/2} W_{N/2}^{ik} X_{2k+1} \\ &= u_i + W_N^i v_i \end{aligned}$$

當 $N/2 \le i < N$

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{0 \le k < N/2} W_{N/2}^{ik} X_{2k} + W_N^i \sum_{0 \le k < N/2} W_{N/2}^{ik} X_{2k+1} \\ &= \sum_{0 \le k < N/2} W_{N/2}^{(i-N/2)k} X_{2k} + W_N^i \sum_{0 \le k < N/2} W_{N/2}^{(i-N/2)k} X_{2k+1} \\ &= u_{i-N/2} + W_N^i v_{i-N/2} \end{aligned}$$

範例2：試證 $T(N)=2T(N/2)+\Theta(N)=O(N\log N)$

解答：

已知 $T(N)=2T(N/2)+\Theta(N)$，可推得

$$
\begin{aligned}
T(N) &= 2T(N/2)+\Theta(N) \\
&\le 2T(N/2)+CN \\
&\le 2^2T(N/4)+CN+CN \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\le 2^kT(N/2^k)+CN+\ldots+CN+CN \\
&= 2^kT(N/2^k)+(1+\ldots+1+1)CN \\
&= \frac{N}{2}T(2)+(\log N-1)CN \\
&= \frac{N}{2}+CN\log N-CN \\
&= O(N\log N)
\end{aligned}
$$

解答完畢

- 傅利葉配對(Fourier Pair)
回到二維的FT，假設一張影像位於 (x,y) 的灰階值為 $f(x,y)$，則二維的FT定義為

$$F(u,v) = \frac{1}{N \times N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi[\frac{(ux+vy)}{N}]} \qquad (2.5.3)$$

IFT(Inverse FT)依下式求得

$$f(x,y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{-j2\pi[\frac{(ux+vy)}{N}]} \qquad (2.5.4)$$

$f(x, y)$ 和 $F(u, v)$ 也稱作傅利葉配對。

2.6 傅利葉轉換的性質

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} e^{\frac{-j2\pi ux}{N}} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{\frac{-j2\pi uy}{N}} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} F(x,v) e^{\frac{-j2\pi ux}{N}} \end{aligned} \qquad (2.6.1)$$

式子(2.6.1)中 $F(x,v)$ 可看成先對 y 軸進行FT再對 x 軸進行FT。(2.6.1)式顯示的是FT的**分開性**(Separability) 。

範例1：假如我們想把FT後的結果從**原點**(Origin)移到**中央**(Center)該如何辦到呢？

解答：

首先將乘上 $(-1)^{x+y}$，則 $f(x,y)(-1)^{x+y}$ 的FT如下所算

$$\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,\ y)(-1)^{x+y} e^{-j2\pi\left[\frac{(ux+vy)}{N}\right]}$$

$$=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,\ y)e^{j\pi(x+y)}e^{-j2\pi\left[\frac{(ux+vy)}{N}\right]}=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,\ y)e^{j2\pi\frac{(\frac{N}{2}x+\frac{N}{2}y)}{N}}e^{-j2\pi\left[\frac{(ux+vy)}{N}\right]}$$

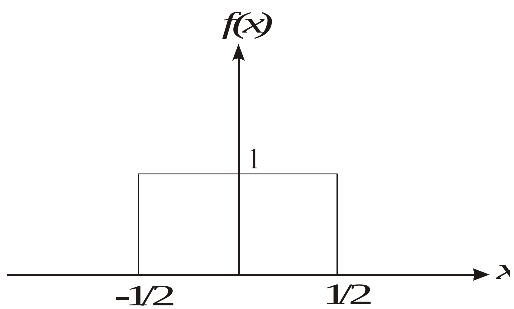
$$=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,\ y)e^{-j2\pi\left[\frac{(u-\frac{N}{2})x+(v-\frac{N}{2})y}{N}\right]}=F(u-\frac{N}{2},v-\frac{N}{2})\quad(2.6.2)$$

由 $f(x,y)(-1)^{x+y}$ 的FT等於 $F(u-\frac{N}{2},v-\frac{N}{2})$，可得知已將FT的結果從原點移至中央處了。式 2.6.2) 顯示了FT的平移性(Translation)。

解答完畢

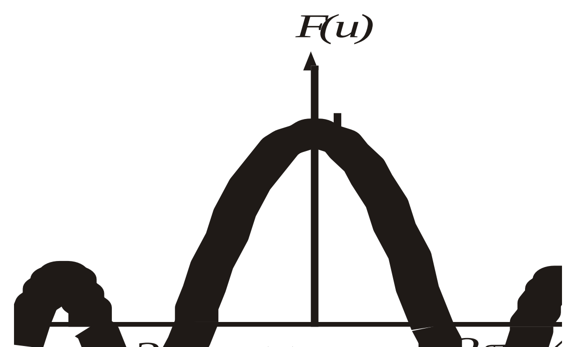
- 放大性(Scaling)

若將 $f(x,y)$ 乘上一個係數 C，則 $C\times f(x,y)$ 經FT作用後得到 $CF(u,v)$ ，這個性質稱作**放大**性質。令 $\alpha x = z$ ，則 $x=\frac{z}{\alpha}$ 和 $dx=\frac{1}{\alpha}dz$ 。可推得 $f(\alpha x)$ 和 $\frac{1}{|\alpha|}F(\frac{u}{\beta})$ 為**傳利葉配對**(Fourier Pair)，具有**倒數放大性質**(Reciprocal-Scaling)。

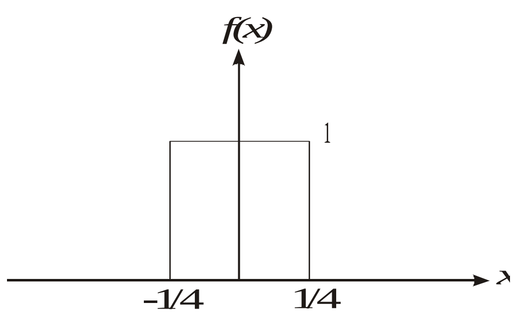


f(x)

↔

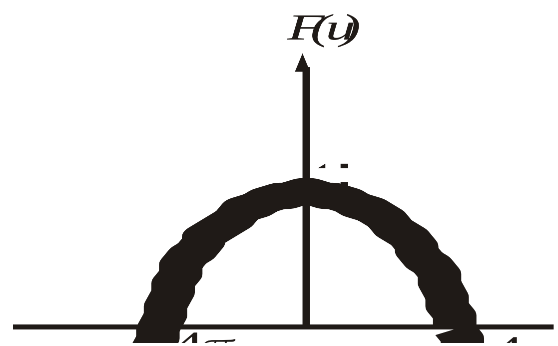


F(u)



f(2x)

↔



1/2f(u/2)

迴積定理(Convolution Theorem)

兩函數 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的**迴積**定義為

$$f(x)*g(x)=\sum_{m=0}^{N-1}f(m)g(x-m)$$

令

$$z(x)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}f(m)g(x-m)$$

則所有 $z(x)$ 經FT作用後得

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}z(x)W^{kx}&=\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}f(m)g(x-m)W^{kx}\\&=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}f(m)\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}g(x-m)W^{kx}\\&=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}f(m)W^{km}\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}g(x)W^{kx}\\&=F(u)G(u)\end{aligned}$$